描述无人机姿态的方法及其关系

欧拉角、旋转矩阵、四元数、修正罗德里格斯参数

张晶玮 2021302330

欧拉角：欧拉角（Euler angle）指的是绕参考坐标系主轴（X,Y,Z）之一旋转的角度。利用最多三次欧拉角旋转，原坐标系可变换为任何新坐标系。这三个欧拉角即构成了欧拉角序列。共有 12 种欧拉角序列。

无人机的欧拉角定义在机体系下，机体轴坐标系的原点固连于飞行器重心，X 轴指向机头，Z 轴指向机腹，X 轴和 Z 轴都位于纵向对称面内，Y 轴指向机身右侧，与 X、Z 轴构成右手系。其中重要的一组欧拉角：绕 Z 轴转 ψ 为偏航角，绕 Y 轴转 θ 为俯仰角，绕 X 轴转 φ 为滚转角。

旋转矩阵：分别表示绕 Z 轴转 ψ，绕 Y 轴转 θ，绕 X 轴转 φ

$$R_\psi=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\quad R_\phi=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

欧拉角的局限性：只要 θ≠±90°，欧拉角可以描述清楚任何刚体的姿态以及角运动信息，θ=±90°出现**万向锁现象**。而对于大部分飞行器来说，俯仰角不会到 90°，所以，使用欧拉角进行姿态控制完全可以满足使用要求，但对于一些要求高机动能力的飞行器来说，为了防止俯仰角 90°时出现奇点，使用**四元数替代欧拉角**进行姿态控制。另外，对于姿态解算时欧拉角描述方法也会出现问题，所以使用四元数进行姿态解算。

万向锁问题出现在当两个旋转轴接近平行时，一个旋转轴的旋转会导致另外两个轴的旋转受限，从而丧失了一个旋转自由度。这种情况下，无法唯一地确定物体的姿态，因为存在多个欧拉角组合可以表示相同的旋转。

四元数：四元数是由 1 个实数加上 3 个复数组合而成，通常可以表示成 $q=q_0+q_1 i+q_2 j+q_3 k$ 或者 $q=(q_0,q_1,q_2,q_3)$，其中 q_0,q_1,q_2,q_3 都是实数，而 $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$。

假设存在一根旋转轴 u，绕 u 轴旋转 σ 角度，代表这个旋转的四元数为$q=\left(\cos\frac{\sigma}{2},u\sin\frac{\sigma}{2}\right)$，其中 u 是旋转轴的单位向量，q 是一个单位四元数。

它对任何向量施加以下算子运算后可以得到该向量绕 u 轴旋转 σ 角度后的向量：$w=qvq^*$

四元数转旋转矩阵：

已知四元数：$q=(q_0,q_1,q_2,q_3)$

旋转矩阵为：

$$R_b^n=\begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}$$

旋转矩阵转四元数：

已知旋转矩阵：

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

则求解四元数时根据的方法就是从四元数转旋转矩阵的公式中得到：

$$r_{11}+r_{22}+r_{33}=2q_0^2-1\Rightarrow q_0=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{33}}$$

$$r_{11}-r_{22}-r_{33}=2q_1^2-1\Rightarrow q_1=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}-r_{22}-r_{33}}$$

$$r_{22}-r_{11}-r_{33}=2q_2^2-1\Rightarrow q_2=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+r_{22}-r_{11}-r_{33}}$$

$$r_{33}-r_{11}-r_{22}=2q_3^2-1\Rightarrow q_3=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+r_{33}-r_{11}-r_{22}}$$

但从上式中是无法确定正负号的，所以又有：

$$\begin{aligned} r_{12}+r_{21}&=2(q_1q_2-q_0q_3)+2(q_1q_2+q_0q_3)=4q_1q_2 \\ r_{21}-r_{12}&=2(q_1q_2+q_0q_3)-2(q_1q_2-q_0q_3)=4q_0q_3 \\ r_{13}+r_{31}&=2(q_1q_3+q_0q_2)+2(q_1q_3-q_0q_2)=4q_1q_3 \\ r_{13}-r_{31}&=2(q_1q_3+q_0q_2)-2(q_1q_3-q_0q_2)=4q_0q_2 \\ r_{23}+r_{32}&=2(q_2q_3-q_0q_1)+2(q_2q_3+q_0q_1)=4q_2q_3 \\ r_{32}-r_{23}&=2(q_2q_3+q_0q_1)-2(q_2q_3-q_0q_1)=4q_0q_1 \end{aligned}$$

这样只要得到 q0 到 q4 中的任意一个就能根据上面的关系求出剩余 3 个分量的值，假设我们先求 q0 的值，则有：

$$\begin{cases} q_0=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{33}} \\ q_1=\dfrac{r_{32}-r_{23}}{4q_0} \\ q_2=\dfrac{r_{13}-r_{31}}{4q_0} \\ q_3=\dfrac{r_{21}-r_{12}}{4q_0} \end{cases}$$

从上式中可以看到，求得的四元数有两个，但他们表示的是同一种旋转关系，至于先求 q0 到 q4 中的哪个值，在实际使用时应该全部一起求，看哪个值大，就选取哪个，以防止某一项在出现 0 时无法计算的情况。

欧拉角转四元数：

已知欧拉角：α、β、γ

四元数为：

$$q=\begin{bmatrix}\cos\frac{\gamma}{2}\\0\\0\\\sin\frac{\gamma}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\beta}{2}\\0\\\sin\frac{\beta}{2}\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\\\sin\frac{\alpha}{2}\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\end{bmatrix}$$

四元数转欧拉角：

已知四元数：$q=(q_0,q_1,q_2,q_3)$

欧拉角为：

$$\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}atan2(2(q_0q_1+q_2q_3),1-2(q_1^2+q_2^2))\\\arcsin(2(q_0q_2-q_1q_3))\\atan2(2(q_0q_3+q_1q_2),1-2(q_2^2+q_3^2))\end{bmatrix}$$

但是当 β 角度为 90 度时，四元数反向计算欧拉角时会出现奇点，无法计算。因为这时候简化后的四元数是这样的：

$$\begin{bmatrix}0.707\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\\0.707\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\\0.707\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\\0.707\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\end{bmatrix}$$

所以 atan2 中后面那一项即横坐标就变成了 0：$1-2({q_2}^2+{q_3}^2)=0$

此时通常令 α=0，然后解出欧拉角的值。

修正罗德里格斯参数：modified Rodrigues parameters 又称为 MRP。它是描述两坐标系之间方向关系的一种方法，且由欧拉四元数$(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$衍生定义：

$$\sigma_i=\frac{\beta_i}{1+\beta_0},i=1,2,3$$

三个参数组成的向量即为修正罗德里格斯参数 σ： $[\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]'=\hat{\sigma}$

设主旋转矢量中主轴为$\hat{e}$，主角度为Φ，

则修正罗德里格斯参数可由两者导出： $\hat{\sigma} = \hat{e}\tan\frac{\Phi}{4}$

与欧拉四元数的关系

$$\beta_0 = \frac{1-\hat{\sigma}^T\hat{\sigma}}{1+\hat{\sigma}^T\hat{\sigma}}$$

$$\beta_i = \frac{2\sigma_i}{1+\hat{\sigma}^T\hat{\sigma}}$$

求得四元数$(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

与方向余弦矩阵的关系

方向余弦矩阵用修正罗德里格斯参数表示为： $[C] = [I] + \frac{8[\tilde{\sigma}]^2 - 4(1-\hat{\sigma}^T\hat{\sigma})[\tilde{\sigma}]}{(1+\hat{\sigma}^T\hat{\sigma})^2}$

在已知方向余弦矩阵的情况下求修正罗德里格斯参数：

定义 $\xi = \sqrt{\operatorname{trace}[C]+1} = 2\beta_0$ 其中，β_0为第一个欧拉四元数参数，trace[C]为矩阵[C]的迹。

则修正罗德里格斯参数表示为

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\xi(\xi+2)}\begin{pmatrix} C_{23}-C_{32} \\ C_{31}-C_{13} \\ C_{12}-C_{21} \end{pmatrix}$$